

Série PCSI / PTSI — CORRIGÉ : vrai DS n°0013

Mathématiques — Octobre 2026. Corrigé par Maths-Ingé

Sommes, Inégalités, Injectivité/Surjectivité & Étude de fonction (2h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1 — Des sommes

1. Par la formule du binôme de Newton : $A_n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 1^j 1^{n-j} = (1+1)^n = 2^n$.

2. De même : $B_n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 2^j 1^{n-j} = (1+2)^n = 3^n$.

3. La somme C_n se sépare par produit de deux sommes indépendantes :

$$C_n = \left(\sum_{j=0}^n 2^j \right) \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \right) = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \times 2^n = 2^{2n+1} - 2^n$$

4. Échangeons l'ordre des sommations dans D_n :

$$D_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^i 2^j \right) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (2^{i+1} - 1) = 2 \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2 \cdot 3^n - 2^n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

5. Intervertissons les sommations dans E_n :

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\sum_{j=i}^n 2^j \right) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i \frac{2^{n-i+1} - 1}{2 - 1} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^{n+1} - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i = 2^{n+1} \cdot 2^n - 3^n = 2^{2n+1} - 3^n \end{aligned}$$

6. Vérifions les deux membres :

- $C_n + 3^n = (2^{2n+1} - 2^n) + 3^n$.
- $D_n + E_n = (2 \cdot 3^n - 2^n) + (2^{2n+1} - 3^n) = 2^{2n+1} - 2^n + 3^n$.

On a bien la stict égalité : $\mathbf{C_n + 3^n = D_n + E_n}$.

7. Les indices (i, j) de la somme $D_n + E_n$ recouvrent le carré $\llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket$:

- D_n correspond au domaine $j \leq i$.
- E_n correspond au domaine $i \leq j$.

La diagonale $i = j$ est comptée deux fois (une fois dans D_n et une fois dans E_n).

Par conséquent, $D_n + E_n = C_n + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i = C_n + 3^n$.

Exercice 2 — Une somme

8. Cherchons $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{x+4}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$.

- En multipliant par x puis en posant $x = 0$: $a = \frac{0+4}{(0+1)(0+2)} = 2$.

- En multipliant par $x + 1$ puis en posant $x = -1 : b = \frac{-1+4}{(-1)(-1+2)} = -3$.
- En multipliant par $x + 2$ puis en posant $x = -2 : c = \frac{-2+4}{(-2)(-2+1)} = 1$.

D'où $\frac{k+4}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{1}{k+2}$. Réécrivons la somme S_n :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

Par télescopage :

$$S_n = 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

9. En faisant tendre n vers $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{2}$.

Exercice 3 — Une inégalité

10. Soient $x, y \in [0, 1]$. Étudions la différence :

$$(1 + xy) - (x + y) = 1 - x - y(1 - x) = (1 - x)(1 - y)$$

Puisque $x \leq 1$ et $y \leq 1$, $(1 - x) \geq 0$ et $(1 - y) \geq 0$, donc $(1 - x)(1 - y) \geq 0$, d'où $x + y \leq 1 + xy$.

11. Soit $t \in [0, 1]$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, posons $x = t^k \in [0, 1]$ et $y = t^{2n-k} \in [0, 1]$.

D'après la question précédente :

$$t^k + t^{2n-k} \leq 1 + t^k \cdot t^{2n-k} = 1 + t^{2n}$$

En multipliant par $\binom{n}{k} \geq 0$ et en sommant pour k allant de 0 à n :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{2n-k} \leq (1 + t^{2n}) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n (1 + t^{2n})$$

12. Remarquons que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k = (1 + t)^n$ et :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{2n-k} = t^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{n-k} = t^n (1 + t)^n$$

Le membre de gauche vaut donc $(1 + t)^n + t^n (1 + t)^n = (1 + t)^n (1 + t^n)$.

D'où l'inégalité : $(1 + t)^n (1 + t^n) \leq 2^n (1 + t^{2n})$.

13. Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'inégalité est immédiate. Supposons $a, b > 0$.

Quitte à échanger a et b , on peut supposer $a \leq b$. Posons $t = \frac{a}{b} \in [0, 1]$.

D'après la question 12 :

$$\left(1 + \frac{a}{b} \right)^n \left(1 + \frac{a^n}{b^n} \right) \leq 2^n \left(1 + \frac{a^{2n}}{b^{2n}} \right)$$

En multipliant les deux membres par $b^{2n} = b^n \cdot b^n$, on obtient :

$$(a + b)^n (a^n + b^n) \leq 2^n (a^{2n} + b^{2n})$$

Exercice 4 — Injectivité et surjectivité

14. • **Injectivité** : $f(10) = 1 + 0 = 1$ et $f(1) = 1$. Comme $10 \neq 1$, f n'est pas injective.
- **Surjectivité** : Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, le nombre formé de m fois le chiffre 1 ($N = \underbrace{11 \dots 1}_m$) vérifie $f(N) = m$. Pour $m = 0$, $f(0) = 0$. Donc f est surjective.
15. • **Injectivité** : $g(12) = 2$ et $g(2) = 2$. Donc g n'est pas injective.
- **Surjectivité** : L'image de g est $\llbracket 0, 9 \rrbracket \subsetneq \mathbb{N}$. $10 \notin \text{Im}(g)$, donc g n'est pas surjective.
16. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(g \circ f)(n) = g(f(n)) \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$.
L'image de $g \circ f$ est incluse dans $\llbracket 0, 9 \rrbracket$, donc $g \circ f$ n'est pas surjective.
17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$, d'où $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = g(n) \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$.
L'image de $f \circ g$ est $\llbracket 0, 9 \rrbracket \subsetneq \mathbb{N}$, donc $f \circ g$ n'est pas surjective.

Exercice 5 — Étude d'une fonction

18. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, donc $2e^x + 1 > 0$ et $e^x + 2 > 0$. Le quotient est strictement positif, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

$$f(-x) = \ln \left(\frac{2e^{-x} + 1}{e^{-x} + 2} \right) = \ln \left(\frac{2 + e^x}{1 + 2e^x} \right) = -\ln \left(\frac{2e^x + 1}{e^x + 2} \right) = -f(x)$$

f est impaire. On peut restreindre son étude à $[0, +\infty[$.

19. Posons $u(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x + 2}$. $u'(x) = \frac{2e^x(e^x + 2) - (2e^x + 1)e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{3e^x}{(e^x + 2)^2} > 0$.
 $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{3e^x}{(2e^x + 1)(e^x + 2)} > 0$.
 f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
20. • En $+\infty$: $u(x) \sim \frac{2e^x}{e^x} = 2 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln 2$.
• En $-\infty$: par imparité, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\ln 2$.
21. Tableau de variations : f croît strictement de $-\ln 2$ à $\ln 2$ sur $\mathbb{R}$.
22. La courbe possède deux asymptotes horizontales $y = \ln 2$ en $+\infty$ et $y = -\ln 2$ en $-\infty$. Elle passe par l'origine $(0, 0)$ avec une tangente de pente $f'(0) = \frac{3}{3 \times 3} = \frac{1}{3}$.
23. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\ln 2, \ln 2[$.
24. Résolvons $f(x) = \frac{1}{2}$:

$$\frac{2e^x + 1}{e^x + 2} = \sqrt{e} \iff 2e^x + 1 = \sqrt{e}e^x + 2\sqrt{e} \iff e^x(2 - \sqrt{e}) = 2\sqrt{e} - 1 \iff e^x = \frac{2\sqrt{e} - 1}{2 - \sqrt{e}}$$

D'où la solution unique : $x = \ln \left(\frac{2\sqrt{e} - 1}{2 - \sqrt{e}} \right)$.

25. Soit $y \in]-\ln 2, \ln 2[$. $f(x) = y \iff \frac{2e^x + 1}{e^x + 2} = e^y \iff e^x(2 - e^y) = 2e^y - 1$.
Ainsi, $f^{-1}(y) = \ln \left(\frac{2e^y - 1}{2 - e^y} \right)$.