

Exercice 1 — Des sommes

On considère un entier naturel n fixé.

- Calculer les sommes :

$$1. A_n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}$$

$$2. \text{ puis } B_n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 2^j$$

- Calculer de manières indépendantes les unes des autres, les sommes :

$$3. C_n = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^j$$

$$4. D_n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} 2^j$$

$$5. \text{ et } E_n = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \binom{n}{i} 2^j$$

- À l'aide de la question précédente, vérifier l'égalité $C_n + 3^n = D_n + E_n$.
- Retrouver ce résultat d'une autre façon.

Exercice 2 — Une somme

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+4}{k(k+1)(k+2)}$$

Indication : on pourra décomposer en éléments simples la fraction, c'est-à-dire chercher des réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\}, \quad \frac{x+4}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

9. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 3 — Une inégalité

10. Prouver que, si x et y sont des réels de l'intervalle $[0, 1]$, alors $x + y \leq 1 + xy$.
11. En déduire, si $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{2n-k} \leq 2^n (1 + t^{2n})$$

12. À l'aide des résultats précédents, montrer pour tout $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+t)^n(1+t^n) \leq 2^n(1+t^{2n})$$

13. Montrer, pour tous réels positifs a et b et entier naturel n :

$$(a+b)^n(a^n+b^n) \leq 2^n(a^{2n}+b^{2n})$$

Exercice 4 — Injectivité et surjectivité

Soit f l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à un nombre n associe la somme de ses chiffres (par exemple $f(17) = 8$). Soit g l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à un nombre n associe son dernier chiffre (par exemple $g(17) = 7$).

14. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f .
15. Étudier l'injectivité et la surjectivité de g .
16. L'application $g \circ f$ est-elle surjective ?
17. L'application $f \circ g$ est-elle surjective ?

Exercice 5 — Étude d'une fonction

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par $f(x) = \ln \left(\frac{2e^x+1}{e^x+2} \right)$.

18. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$. Étudier sa parité. En déduire un domaine d'étude adéquat.
19. Montrer que f est monotone sur $\mathbb{R}$. Est-elle strictement monotone sur $\mathbb{R}$?
20. Déterminer les limites éventuelles de f en $-\infty$ et $+\infty$.
21. Dresser le tableau de variations de f .
22. Tracer l'allure de la courbe de f .
23. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
24. Résoudre l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$.
25. Déterminer une expression de la réciproque de f .