

Série PCSI / PTSI — CORRIGÉ : vrai DS n°0014

Mathématiques — Octobre 2026. Corrigé par Maths-Ingé

Trigonométrie, Formule de Viète & Sommes géométriques (1h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1 — Linéarisation trigonométrique

Soit $x \in \mathbb{R}$. Utilisons la formule de duplication $\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$ appliquée à $\theta = 3x$:

$$\sin^2(3x) = \frac{1 - \cos(6x)}{2}$$

On injecte cette identité dans l'expression recherchée :

$$\sin^2(3x) \cos(2x) = \frac{1 - \cos(6x)}{2} \cos(2x) = \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{2} \cos(6x) \cos(2x)$$

D'après la formule de transformation de produit en somme $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$:

$$\cos(6x) \cos(2x) = \frac{1}{2} (\cos(8x) + \cos(4x))$$

Il vient alors immédiatement :

$$\sin^2(3x) \cos(2x) = \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{4} (\cos(8x) + \cos(4x)) = \frac{2 \cos(2x) - \cos(4x) - \cos(8x)}{4}$$

Remarque (méthode d'Euler) : En posant $\sin(3x) = \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i}$ et $\cos(2x) = \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}$, le développement direct conduit au même résultat.

Exercice 2 — Un produit télescopique (Formule de Viète)

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Posons $\theta = \frac{\alpha}{2^k}$.

Comme $\alpha \in]0, \pi[$ et $k \geq 0$, on a $\theta \in]0, \pi[$, donc $\sin(\theta) \neq 0$.

D'après la formule de duplication du sinus, $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$, ce qui donne :

$$\sin\left(2 \times \frac{\alpha}{2^k}\right) = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) \iff \sin\left(\frac{\alpha}{2^{k-1}}\right) = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$$

En divisant par $2 \sin\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) \neq 0$, on obtient bien :

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2^{k-1}}\right)}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)}$$

2. Par produit de ces égalités pour k allant de 0 à n :

$$P_n = \prod_{k=0}^n \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) = \prod_{k=0}^n \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2^{k-1}}\right)}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^{n+1}} \prod_{k=0}^n \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)}$$

Le produit est télescopique : tous les termes intermédiaires se simplifient deux à deux.

Il ne subsiste que le numérateur pour $k = 0$ et le dénominateur pour $k = n$:

$$P_n = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2^{-1}}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)} = \frac{\sin(2\alpha)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$$

3. Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\frac{\alpha}{2^n} \rightarrow 0$.

Par l'équivalent usuel $\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, on a :

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{2^n}$$

Par suite :

$$2^{n+1} \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{n+1} \times \frac{\alpha}{2^n} = 2\alpha$$

Comme $\alpha \neq 0$, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_n = \frac{\sin(2\alpha)}{2\alpha}$$

Exercice 3 — Sommes trigonométriques & Arc moitié

1. Par linéarité de la somme et formule d'Euler ($e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$) :

$$T\left(\frac{\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^n e^{ik\frac{\pi}{n}} = \sum_{k=0}^n \left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right) = \sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + i \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \mathbf{C}_n + i\mathbf{S}_n$$

2. Soit $x \in]0, 2\pi[$. Comme $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, on a $e^{ix} \neq 1$.

$T(x)$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $e^{ix} \neq 1$ et de premier terme $e^0 = 1$:

$$T(x) = \sum_{k=0}^n (e^{ix})^k = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$$

Factorisons par l'arc moitié au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned} 1 - e^{i(n+1)x} &= e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \left(e^{-i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \right) = -2i e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \\ 1 - e^{ix} &= e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}} \right) = -2i e^{i\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

En effectuant le quotient :

$$T(x) = \frac{-2i e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{-2i e^{i\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{(n+1)x}{2} - \frac{x}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

3. (a) Évaluons l'expression obtenue en $x = \frac{\pi}{n} \in]0, 2\pi[$:

$$T\left(\frac{\pi}{n}\right) = e^{i\frac{n}{2} \frac{\pi}{n}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

Puisque $e^{i\pi/2} = i$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$, il vient :

$$T\left(\frac{\pi}{n}\right) = i \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 0 + i \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

En identifiant avec $T\left(\frac{\pi}{n}\right) = C_n + iS_n$, on en déduit par unicité des parties réelle et imaginaire :

$$\mathbf{C}_n = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

- (b) Pour calculer $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$, choisissons l'entier n tel que $\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{8}$, soit $n = 4$.
D'après la question précédente :

$$S_4 = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

Or, par définition de la somme S_4 :

$$\begin{aligned} S_4 &= \sum_{k=0}^4 \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) = \sin(0) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin(\pi) \\ &= 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{S_4} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2} - 1$$