

Série PSI / PSI* — CORRIGÉ : vrai DS n°0001

Mathématiques — Septembre 2026. Corrigé par Maths-Ingé

Algèbre linéaire, Projecteurs, Commutant & Endomorphismes cycliques (2h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice I — Composition et rangs

1. Remarquons que $\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im } f) \subset \text{Im } g$.

Par inclusion des sous-espaces vectoriels :

$$\text{rg}(g \circ f) = \dim g(\text{Im } f) \leq \dim \text{Im } g = \text{rg}(\mathbf{g})$$

2. Considérons l'application restreinte $g|_{\text{Im } f} : \text{Im } f \rightarrow E$.

Son image est $g(\text{Im } f) = \text{Im}(g \circ f)$. D'après le théorème du rang appliqué à cette restriction :

$$\dim \text{Im } f = \dim \ker(g|_{\text{Im } f}) + \dim \text{Im}(g \circ f) \geq \dim \text{Im}(g \circ f)$$

D'où la majoration : $\text{rg}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f}) \leq \text{rg}(\mathbf{f})$.

3. Supposons $f \circ g \circ f = f$.

- D'une part, $f = (f \circ g) \circ f \implies \text{rg}(f) \leq \text{rg}(f \circ g)$ d'après la question 2.
Comme on a aussi $\text{rg}(f \circ g) \leq \text{rg}(f)$ (question 2), il vient $\text{rg}(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) = \text{rg}(\mathbf{f})$.
- D'autre part, $f = f \circ (g \circ f) \implies \text{rg}(f) \leq \text{rg}(g \circ f)$ d'après la question 1.
Comme $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$ (question 2), on obtient $\text{rg}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f}) = \text{rg}(\mathbf{f})$.

Ainsi, $\text{rg}(\mathbf{f}) = \text{rg}(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) = \text{rg}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})$.

Remarque : On a aussi $\text{rg}(f) = \text{rg}(f \circ g \circ f) \leq \text{rg}(g)$, donc $\text{rg}(f) \leq \text{rg}(g)$. L'égalité complète avec $\text{rg}(g)$ nécessite la relation réciproque $g \circ f \circ g = g$.

Exercice II — Projecteurs de même noyau

1. Supposons $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$.

- $f^2 = f \circ f = (f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ g = f$, donc f est un projecteur.
- $g^2 = g \circ g = (g \circ f) \circ g = g \circ (f \circ g) = g \circ f = g$, donc g est un projecteur.
- Soit $x \in \ker f$. $f(x) = 0 \implies g(x) = (g \circ f)(x) = g(0) = 0 \implies x \in \ker g$.
- Soit $x \in \ker g$. $g(x) = 0 \implies f(x) = (f \circ g)(x) = f(0) = 0 \implies x \in \ker f$.

Ainsi, $\ker \mathbf{f} = \ker \mathbf{g}$: f et g sont des projecteurs ayant le même noyau.

2. Réciproquement, soient p et q deux projecteurs de même noyau $K = \ker p = \ker q$.

Comme p et q sont des projecteurs, $E = \text{Im } p \oplus K = \text{Im } q \oplus K$.

Soit $x \in E$. Décomposons x sur $E = \text{Im } q \oplus K$: $x = y + z$ avec $y \in \text{Im } q$ et $z \in K$.

- $(p \circ q)(x) = p(q(y + z)) = p(q(y) + 0) = p(y)$ car $q|_{\text{Im } q} = \text{id}_{\text{Im } q}$.
Or $x - y = z \in K = \ker p$, donc $p(x - y) = 0 \implies p(x) = p(y)$.
D'où $(p \circ q)(x) = p(x)$ pour tout $x \in E$, soit $\mathbf{p} \circ \mathbf{q} = \mathbf{p}$.
- Par rôle symétrique entre p et q , on obtient de même $\mathbf{q} \circ \mathbf{p} = \mathbf{q}$.

Exercice III — Supplémentaire commun

Démontrons que $E = F \oplus E_1$ et $E = F \oplus E_2$ avec $F = \{x - f(x) \mid x \in E_1\}$.

• **Montrons que $E = F \oplus E_1$ par Analyse-Synthèse :**

– *Analyse* : Soit $v \in E$. Décomposons $v = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.

On cherche $u \in F$ et $y_1 \in E_1$ tels que $v = u + y_1$.

Puisque $u \in F$, il existe $z \in E_1$ tel que $u = z - f(z)$.

Ainsi : $x_1 + x_2 = (z - f(z)) + y_1 = (z + y_1) - f(z)$.

Comme $z + y_1 \in E_1$ et $-f(z) \in E_2$, l'unicité de la décomposition sur $E_1 \oplus E_2$ donne :

$$\begin{cases} -f(z) = x_2 \\ z + y_1 = x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -f^{-1}(x_2) \in E_1 \\ y_1 = x_1 + f^{-1}(x_2) \in E_1 \end{cases}$$

f étant un isomorphisme de E_1 dans E_2 , z et y_1 sont uniques.

– *Synthèse* : Soit $v = x_1 + x_2 \in E$ ($x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$). Posons $z = -f^{-1}(x_2) \in E_1$.

Posons $u = z - f(z) = -f^{-1}(x_2) + x_2 \in F$ et $y_1 = x_1 + f^{-1}(x_2) \in E_1$.

On a $u + y_1 = -f^{-1}(x_2) + x_2 + x_1 + f^{-1}(x_2) = x_1 + x_2 = v$.

La décomposition existe et est unique, donc $\mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{E}_1$.

• **Montrons que $E = F \oplus E_2$:**

– *Intersection* : Soit $v \in F \cap E_2$. Il existe $x \in E_1$ tel que $v = x - f(x) \in E_2$.

D'où $x = v + f(x) \in E_1 \cap E_2 = \{0\} \implies x = 0 \implies v = 0$. Donc $F \cap E_2 = \{0\}$.

– *Somme* : Pour tout $v = x_1 + x_2 \in E$ ($x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$) :

$$v = (x_1 - f(x_1)) + (x_2 + f(x_1))$$

avec $x_1 - f(x_1) \in F$ et $x_2 + f(x_1) \in E_2$.

On conclut que $\mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{E}_2$. F est bien un supplémentaire commun à E_1 et E_2 .

Problème — Commutant d'un endomorphisme cyclique

Partie I — Exemples

- $E = \mathbb{R}^2$, $u(x, y) = (-y, x)$. Posons $x_0 = (1, 0)$.
 $u(x_0) = (0, 1)$. La famille $(x_0, u(x_0)) = ((1, 0), (0, 1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
 u admet une base génératrice, donc $**u$ est cyclique**.
- $E = \mathbb{R}_n[X]$, $u(P) = P'$. Posons $P_0 = X^n$.
 Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $u^k(P_0) = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$.
 La famille $(P_0, u(P_0), \dots, u^n(P_0))$ est échelonnée en degré de n à 0 , donc libre.
 Son cardinal vaut $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, c'est une base de E . $**u$ est cyclique**.
- u est nilpotent d'indice p sur E avec $\dim E = n$.
 - Supposons $p = n$. Puisque $u^{n-1} \neq 0$, il existe $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$.
 Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0$.
 En composant par u^{n-1} , les termes u^k avec $k \geq 1$ s'annulent ($u^{n+k-1} = 0$), d'où $\lambda_0 u^{n-1}(x_0) = 0 \implies \lambda_0 = 0$.
 Par récurrence immédiate (en composant successivement par $u^{n-2}, \dots$), $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.
 La famille $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre de cardinal $n = \dim E$, c'est une base : u est cyclique.
 - Réciproquement, si u est cyclique, il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit libre.
 En particulier, $u^{n-1}(x_0) \neq 0 \implies u^{n-1} \neq 0$, donc $p \geq n$.
 Or, pour un endomorphisme nilpotent en dimension n , son indice d'annulation vérifie $p \leq n$.
 D'où $p = n$.

Conclusion : $**u$ est cyclique si et seulement si $p = n$.

Partie II — Commutant d'un endomorphisme

1. • $0 \in \Gamma(u)$. Pour tout $v, w \in \Gamma(u)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$u \circ (\lambda v + w) = \lambda u \circ v + u \circ w = \lambda v \circ u + w \circ u = (\lambda v + w) \circ u$$

donc $\lambda v + w \in \Gamma(u)$, $\Gamma(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

- $\text{id}_E \in \Gamma(u)$. Pour $v, w \in \Gamma(u)$:

$$u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w = (v \circ u) \circ w = v \circ (u \circ w) = v \circ (w \circ u) = (v \circ w) \circ u$$

donc $v \circ w \in \Gamma(u)$.

$^{**}\Gamma(u)$ est bien une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)^{**}$.

2. Si $u \in \text{GL}(E)$:

$$v \in \Gamma(u) \iff u \circ v = v \circ u \iff u^{-1} \circ (u \circ v) \circ u^{-1} = u^{-1} \circ (v \circ u) \circ u^{-1} \iff v \circ u^{-1} = u^{-1} \circ v \iff v \in \Gamma(u^{-1})$$

Donc $^{**}\Gamma(u) = \Gamma(u^{-1})^{**}$.

3. Soit $w \in \Gamma(u) \cap \Gamma(v)$.

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w) = u \circ (w \circ v) = (u \circ w) \circ v = (w \circ u) \circ v = w \circ (u \circ v) \implies w \in \Gamma(u \circ v)$$

$$(v \circ u) \circ w = v \circ (u \circ w) = v \circ (w \circ u) = (v \circ w) \circ u = (w \circ v) \circ u = w \circ (v \circ u) \implies w \in \Gamma(v \circ u)$$

D'où $^{**}\Gamma(u) \cap \Gamma(v) \subset \Gamma(u \circ v) \cap \Gamma(v \circ u)^{**}$.

4. Soit u un projecteur non trivial ($u^2 = u$, $u \neq 0$, $u \neq \text{id}_E$). Posons $v = \text{id}_E - u$.

On a $u \circ v = u - u^2 = 0$ et $v \circ u = u - u^2 = 0$.

Donc $\Gamma(u \circ v) \cap \Gamma(v \circ u) = \Gamma(0) \cap \Gamma(0) = \mathcal{L}(E)$.

Or $\Gamma(u) \cap \Gamma(v) = \Gamma(u) \subsetneq \mathcal{L}(E)$ (un projecteur non trivial ne commute pas avec tous les endomorphismes). $^{**}\Gamma$ l'inclusion est donc stricte ** .

Partie III — Commutant d'un endomorphisme cyclique

1. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

En appliquant au vecteur x_0 : $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0_E$.

La famille $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ étant une base de E , elle est libre, d'où $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.

$^{**}(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)^{**}$.

2. Soient $v, w \in \Gamma(u)$.

• L'implication $v = w \implies v(x_0) = w(x_0)$ est évidente.

• Réciproquement, supposons $v(x_0) = w(x_0)$. Posons $h = v - w \in \Gamma(u)$. On a $h(x_0) = 0$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$h(u^k(x_0)) = (h \circ u^k)(x_0) = (u^k \circ h)(x_0) = u^k(h(x_0)) = u^k(0) = 0$$

h s'annule sur tous les vecteurs de la base $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$, donc $h = 0$, soit $v = w$.

On a bien l'équivalence : $^{**}v = w \iff v(x_0) = w(x_0)^{**}$.

3. Soit $v \in \Gamma(u)$. Le vecteur $v(x_0) \in E$ se décompose dans la base $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$:

$$v(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x_0) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k \right) (x_0)$$

Posons $P(u) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k \in \mathbb{K}[u]$. Puisque $P(u) \in \Gamma(u)$ et $v(x_0) = P(u)(x_0)$, d'après la question 2 : $v = P(u) \in \mathbb{K}[u]$.

On en déduit que $\Gamma(u) \subset \mathbb{K}[u] \subset \Gamma(u)$, d'où :

$$\Gamma(\mathbf{u}) = \text{Vect}(\text{id}_{\mathbf{E}}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{n-1}) = \mathbb{K}[\mathbf{u}]$$

Puisque $(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ est une famille libre et génératrice de $\Gamma(u)$, c'est une base de $\Gamma(u)$, d'où :

$$\dim \Gamma(\mathbf{u}) = \mathbf{n}$$