

Série PSI / PSI* — vrai DS n°0001

Mathématiques — Septembre 2026.

Algèbre linéaire, Projecteurs, Commutant & Endomorphismes cycliques (2h)

Profil : [Classique CPGE]

Technicité calculatoire : ★★○

Abstraction & Raisonnement : ★★○

Exercice I — Composition et rangs

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$.
2. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$.
3. On suppose que $f \circ g \circ f = f$. Montrer que f , $g \circ f$ et $f \circ g$ ont tous le même rang.

Exercice II — Projecteurs de même noyau

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$.

1. Montrer qu'alors f et g sont deux projecteurs de même noyau.
2. Réciproquement, soient p et q deux projecteurs de même noyau. Montrer que $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

Exercice III — Supplémentaire commun

Soit E un espace vectoriel. On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$ et qu'il existe un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Montrer que $F = \{x - f(x) \mid x \in E_1\}$ est un supplémentaire commun à E_1 et E_2 .

On pourra raisonner par analyse-synthèse pour démontrer que $E = F \oplus E_1$.

Problème — Commutant d'un endomorphisme cyclique

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \geq 1$.

On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est *cyclique* s'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ forme une base de E .

Partie I — Exemples

1. Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}^2$ et $u : (x, y) \mapsto (-y, x)$. Montrer que u est cyclique.
2. On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}_n[X]$, et on considère l'endomorphisme de dérivation défini pour tout $P \in E$ par $u(P) = P'$. Montrer que u est cyclique.
3. Dans cette question, E est un espace vectoriel de dimension n , et u est un endomorphisme nilpotent d'indice p (c'est-à-dire que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$). Montrer que u est cyclique si et seulement si $p = n$.

Partie II — Commutant d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit le commutant de u par l'ensemble :

$$\Gamma(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$$

1. Montrer que $\Gamma(u)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ (c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par la composition $\circ$).

2. Montrer que si $u \in \text{GL}(E)$ est un automorphisme de E , alors $\Gamma(u) = \Gamma(u^{-1})$.
3. Montrer que pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$:

$$\Gamma(u) \cap \Gamma(v) \subset \Gamma(u \circ v) \cap \Gamma(v \circ u)$$

4. En supposant que u est un projecteur non trivial et en posant $v = \text{id}_E - u$, montrer que l'inclusion précédente peut être stricte.

Partie III — Commutant d'un endomorphisme cyclique

Soit u un endomorphisme cyclique et x_0 un vecteur de E tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ forme une base de E .

1. Montrer que $(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ forme une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.
2. Soient $(v, w) \in \Gamma(u)^2$. Montrer l'équivalence :

$$v = w \iff v(x_0) = w(x_0)$$

3. En déduire que $\Gamma(u) = \text{Vect}(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1})$, puis que $\Gamma(u) = \mathbb{K}[u]$, et déterminer la dimension de $\Gamma(u)$.