

Série PSI / PSI* — CORRIGÉ : vrai DS n°0002

Mathématiques — Septembre 2026. Corrigé par Maths-Ingé

Sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments ont un rang majoré (4h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Partie I — Résultats préliminaires

1. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $X^\top X = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Une somme de carrés réels est nulle si et

seulement si chaque terme est nul. D'où $\mathbf{X}^\top \mathbf{X} = \mathbf{0} \iff \mathbf{X} = \mathbf{0}$.

- (b) • Si $X \in \ker M$, $MX = 0 \implies M^\top MX = M^\top(0) = 0 \implies X \in \ker(M^\top M)$.

• Réciproquement, si $X \in \ker(M^\top M)$, alors $M^\top MX = 0$.

En multipliant à gauche par $X^\top$: $X^\top M^\top MX = 0 \iff (MX)^\top (MX) = 0$.

D'après la question I.1.a appliquée à MX , on en déduit $MX = 0$, soit $X \in \ker M$.

Ainsi, $\ker \mathbf{M} = \ker(\mathbf{M}^\top \mathbf{M})$.

2. Considérons l'application :

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) & \mapsto \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & A \end{pmatrix} \end{cases}$$

f est clairement linéaire et son image est par définition Ψ_r , donc Ψ_r est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculons son noyau : $f(A, B) = 0 \iff A = 0$ et $B = 0$. f est injective.

Par le théorème de l'isomorphisme sur son image :

$$\dim \Psi_r = \dim \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R}) + \dim \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}) = (n-r)^2 + r(n-r) = (n-r)(n-r+r) = \mathbf{n(n-r)}$$

3. (a) L'application $(B, C) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & B \\ C^\top & 0 \end{pmatrix}$ est une injection linéaire de $\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'image Ψ'_r .

Donc Ψ'_r est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension :

$$\dim \Psi'_r = 2 \times r(n-r) = \mathbf{2r(n-r)}$$

- (b) L'application $(M_1, M_2) \mapsto \text{tr}(B_1^\top B_2 + C_1^\top C_2)$ est la somme des produits scalaires usuels $\text{tr}(B_1^\top B_2)$ sur $\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$ et $\text{tr}(C_1^\top C_2)$ sur $\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$. C'est donc un produit scalaire sur Ψ'_r .

Pour la propriété de symétrie avec la transposée :

$$\begin{aligned} (M_1 \mid M_2^\top) &= \text{tr}(B_1^\top C_2^\top + C_1^\top B_2^\top) = \text{tr}((C_2 B_1)^\top) + \text{tr}((B_2 C_1)^\top) \\ &= \text{tr}(C_2 B_1) + \text{tr}(B_2 C_1) = \text{tr}(B_1 C_2) + \text{tr}(C_1 B_2) = (\mathbf{M}_1^\top \mid \mathbf{M}_2) \end{aligned}$$

4. (a) $M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} AX + BY = 0 \\ CX + DY = 0 \end{cases}$.

Puisque $A \in \text{GL}_r(\mathbb{R})$, la première équation donne $\mathbf{X} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Y}$ ($S = -A^{-1}B$).

En réinjectant dans la seconde : $C(-A^{-1}BY) + DY = 0 \iff (\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{Y} = \mathbf{0}$
($T = D - CA^{-1}B$).

- (b) L'application $\varphi : Y \mapsto \begin{pmatrix} -A^{-1}BY \\ Y \end{pmatrix}$ est une injection linéaire de $\ker(D - CA^{-1}B)$ dans $\ker M$.

Tout vecteur $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \ker M$ s'écrit de manière unique sous la forme $\varphi(Y)$ d'après la question précédente. φ est donc un isomorphisme, d'où :

$$\dim \ker \mathbf{M} = \dim \ker(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$$

- (c) D'après le théorème du rang et la question précédente :

$$\operatorname{rg} M = n - \dim \ker M = n - \dim \ker(D - CA^{-1}B)$$

Comme $D - CA^{-1}B \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$, $\dim \ker(D - CA^{-1}B) \leq n - r$.

Ainsi $\operatorname{rg} M \geq n - (n - r) = r$, d'où $\operatorname{rg} \mathbf{M} \geq \mathbf{r}$.

- (d) $\operatorname{rg} M = r \iff \dim \ker(D - CA^{-1}B) = n - r \iff \ker(D - CA^{-1}B) = \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{R}) \iff \mathbf{D} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

5. (a) Soit $X \in \ker A \cap \ker B$. $AX = 0$ et $BX = 0 \implies (\lambda A + B)X = 0 \implies X \in \ker(\lambda A + B)$.
Soit $Y \in \operatorname{Im}(\lambda A + B)$. $Y = (\lambda A + B)X = \lambda AX + BX \in \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B$.
- (b) Si $A, B \in \mathcal{H}_F$, $F \subset \ker A$ et $F \subset \ker B \implies F \subset \ker A \cap \ker B \subset \ker(\lambda A + B) \implies \lambda A + B \in \mathcal{H}_F$.
Si $A, B \in \mathcal{I}_G$, $\operatorname{Im}(\lambda A + B) \subset \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B \subset G + G = G \implies \lambda A + B \in \mathcal{I}_G$.
 $\mathcal{H}_F$ et $\mathcal{I}_G$ contiennent la matrice nulle et sont stables par combinaison linéaire : ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (c) Complétons une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ ($p = \dim F$).
- Dans cette base, $A \in \mathcal{H}_F$ si et seulement si les p premières colonnes de sa matrice sont nulles.
Les $n - p$ colonnes restantes sont libres. D'où $\dim \mathcal{H}_F = \mathbf{n}(\mathbf{n} - \mathbf{p}) = \mathbf{n}(\mathbf{n} - \dim \mathbf{F})$.
 - Complétons une base de G ($q = \dim G$). $A \in \mathcal{I}_G$ si et seulement si chaque colonne de A appartient à G . Chaque colonne a q degrés de liberté, d'où $\dim \mathcal{I}_G = \mathbf{n}q = \mathbf{n} \dim \mathbf{G}$.

Partie II — Détermination de la dimension maximale

1. Supposons $J_r \in V$.

- (a) $M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda I_r & B \\ B^\top & A \end{pmatrix} \in V$. Pour $\lambda \neq 0$, $\lambda I_r \in \operatorname{GL}_r(\mathbb{R})$.

D'après I.4.d, $\operatorname{rg} M_\lambda \leq r \implies A = B^\top (\lambda I_r)^{-1} B = \frac{1}{\lambda} B^\top B$.

Ceci devant être vrai pour tout $\lambda \neq 0$, on fait tendre $|\lambda| \rightarrow +\infty$: $A = 0$.

D'où $B^\top B = \lambda A = 0$.

D'après I.1.a, $\operatorname{tr}(B^\top B) = 0 \implies \mathbf{B} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

- (b) Si $M \in V \cap \Psi_r$, alors $M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & A \end{pmatrix} \in V$. La question précédente prouve que $M = 0$.

Ainsi $V \cap \Psi_r = \{\mathbf{0}\}$.

Par la formule de Grassmann : $\dim(V \oplus \Psi_r) = \dim V + \dim \Psi_r \leq \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$.

Puisque $\dim \Psi_r = n(n - r)$ (question I.2) :

$$\dim V \leq n^2 - n(n - r) = \mathbf{n}r$$

2. (a) Soit r' le rang maximal des matrices de V . Si $r' = 0$, $V = \{0\}$ et $\dim V = 0 \leq nr$.
Si $r' \geq 1$, il existe $M_0 \in V$ de rang r' . On peut écrire $M_0 = PJ_{r'}Q$ avec $P, Q \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$.
Considérons le sous-espace $V' = P^{-1}VQ^{-1}$.
- $\dim V' = \dim V$ et $\forall M \in V'$, $\operatorname{rg} M \leq r' \leq r$.

- $J_{r'} = P^{-1}M_0Q^{-1} \in V'$.

Par le même raisonnement qu'en II.1 avec r' au lieu de r , $V' \cap \Psi_{r'} = \{0\}$, d'où :

$$\dim V = \dim V' \leq n^2 - \dim \Psi_{r'} = nr' \leq nr$$

On a donc bien $\dim \mathbf{V} \leq \mathbf{n}\mathbf{r}$ dans le cas général.

- (b) • $V_L = \mathcal{H}_F$ avec $F = \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ ($\dim F = n - r$). D'après I.5.c, $\dim V_L = n(n - (n - r)) = \mathbf{n}\mathbf{r}$. Toute matrice de V_L a ses $n - r$ dernières lignes nulles, donc son rang est au plus r .
- $V_C = \mathcal{I}_G$ avec $G = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ ($\dim G = r$). D'après I.5.c, $\dim V_C = n \dim G = \mathbf{n}\mathbf{r}$. Toute matrice de V_C a ses colonnes dans G , donc son rang est au plus r .
-

Partie III — Détermination des espaces de dimension maximale

1. (a) On a $(xI_r - A) \text{com}(xI_r - A) = P_A(x)I_r$.
En développant $\text{com}(xI_r - A) = \sum_{k=0}^{r-1} x^k U_k$, le terme de plus haut degré en x^r à gauche vaut $x^r U_{r-1}$.
À droite, $P_A(x)I_r = (x^r - \text{tr}(A)x^{r-1} + \dots)I_r$. Par identification du coefficient de x^r , $\mathbf{U}_{r-1} = \mathbf{I}_r$.
Lorsque $P_A(x) \neq 0$, la matrice est inversible et :

$$(\mathbf{x}\mathbf{I}_r - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{P_A(\mathbf{x})} \sum_{k=0}^{r-1} \mathbf{x}^k \mathbf{U}_k$$

- (b) Pour λ suffisamment grand, $P_A(\lambda) \neq 0$ et $\lambda I_r - A \in \text{GL}_r(\mathbb{R})$.
D'après I.4.d, $\text{rg } M_\lambda \leq r \iff D = C^\top (\lambda I_r - A)^{-1} B$.
En utilisant la formule précédente :

$$D = \frac{1}{P_A(\lambda)} \sum_{k=0}^{r-1} \lambda^k C^\top U_k B$$

Si l'on fait tendre $\lambda \rightarrow +\infty$, le membre de droite tend vers 0 (car le numérateur est de degré au plus $r - 1$ et $P_A(\lambda)$ est de degré r). D'où $\mathbf{D} = \mathbf{0}$.

Multiplions l'égalité $P_A(\lambda)D = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda^k C^\top U_k B$ par $D = 0$: $\sum_{k=0}^{r-1} \lambda^k C^\top U_k B = 0$.

Un polynôme nul a tous ses coefficients nuls. En particulier pour $k = r - 1$ (sachant $U_{r-1} = I_r$) : $\mathbf{C}^\top \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

2. Supposons $J_r \in V$ et $\dim V = nr$.

- (a) Tout $M \in V$ s'écrit par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C^\top & D \end{pmatrix}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $M + \lambda J_r = \begin{pmatrix} A + \lambda I_r & B \\ C^\top & D \end{pmatrix} \in V$, donc son rang est $\leq r$.

Par la question III.1.b (en remplaçant A par $-A$), on en déduit $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{C}^\top \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

- (b) Pour tout $M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C^\top & 0 \end{pmatrix} \in W$, $M^\top = \begin{pmatrix} 0 & C \\ B^\top & 0 \end{pmatrix}$.

$(M \mid M^\top) = \text{tr}(B^\top C + C^\top B^\top) = \text{tr}(B^\top C) + \text{tr}(BC^\top) = 2 \text{tr}(C^\top B) = 0$ (car $C^\top B = 0$).

D'où $(\mathbf{M} \mid \mathbf{M}^\top) = \mathbf{0}$.

Considérons l'application $T : M \mapsto M^\top$. $T(W) = W^\top$.

Si $M \in W \cap W^\top$, $M^\top \in W$, donc $(M \mid M) = 0 \implies M = 0$.

W et $W^\top$ sont en somme directe dans Ψ'_r . Donc $2 \dim W = \dim(W \oplus W^\top) \leq \dim \Psi'_r = 2r(n - r)$.

Ainsi $\dim \mathbf{W} \leq \mathbf{r}(\mathbf{n} - \mathbf{r})$.

(c) L'application Φ est linéaire, injective (son noyau est clair) et $\dim(\mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \times W) = r^2 + \dim W$. Comme $\dim V = nr = r^2 + r(n-r)$, l'égalité des dimensions impose $\dim W = r(n-r)$ et fait de Φ un **isomorphisme**.

(d) Posons $A = VU^\top \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. A est de rang 1.

Considérons la matrice $K = \begin{pmatrix} A & V \\ U^\top & 0 \end{pmatrix}$.

Par des opérations élémentaires sur les blocs, K est équivalente à une matrice de rang $r+1$, elle est donc **inversible**.

(e) S'il existait $M \in V$ avec $B \neq 0$ et $C \neq 0$, on pourrait trouver des colonnes non nulles $V \in \text{Im } B$ et $U \in \text{Im } C$. D'après la question précédente, une combinaison linéaire dans V contiendrait une sous-matrice inversible d'ordre $r+1$, contredisant la condition de rang $\leq r$.

Donc pour tout $M \in V$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{C} = \mathbf{0}$.

(f) Par stabilité par addition dans un sous-espace vectoriel (argument du lemme des deux sous-espaces) :

soit $B = 0$ pour tout $M \in V$, soit $C = 0$ pour tout $M \in V$.

- Si $C = 0$ pour tout $M \in V$, alors toute matrice de V a ses $n-r$ dernières lignes nulles, donc $\mathbf{V} = \mathbf{V}_L$.
- Si $B = 0$ pour tout $M \in V$, alors toute matrice de V a ses $n-r$ dernières colonnes nulles, donc $\mathbf{V} = \mathbf{V}_C$.

3. Cas général ($\dim V = nr$ et $\text{rg } M \leq r$ pour tout $M \in V$) :

(a) Si toutes les matrices de V étaient de rang $< r$, le rang maximal r' vérifierait $r' \leq r-1$.

D'après la question II.2.a, on aurait $\dim V \leq n(r-1) < nr$, ce qui contredit $\dim V = nr$.

Donc **V contient au moins une matrice M_0 de rang r** .

(b) Écrivons $M_0 = PJ_rQ$ avec $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Le sous-espace $V' = P^{-1}VQ^{-1}$ contient J_r et est de dimension nr .

D'après la question III.2.f, $V' = V_L$ ou $V' = V_C$.

- Si $V' = V_L$, alors $V = PV_LQ = \mathcal{H}_F$ avec $\mathbf{F} = \mathbf{Q}^{-1}(\text{Vect}(\mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n))$ ($\dim F = n-r$).
- Si $V' = V_C$, alors $V = PV_CQ = \mathcal{I}_G$ avec $\mathbf{G} = \mathbf{P}(\text{Vect}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r))$ ($\dim G = r$).