

Série PSI / PSI* — vrai DS n°0002

Mathématiques — Septembre 2026, Quelquepart.

Sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments ont un rang majoré (4h)

Profil : [Classique Concours]

Technicité calculatoire : ***

Abstraction & Raisonnement : ***

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. L'objet du problème est l'étude des sous-espaces vectoriels V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont de rang inférieur ou égal à r . La première partie établit divers résultats utiles pour la suite ; dans la seconde, on majore la dimension de V par nr et dans la troisième on caractérise les sous-espaces de dimension nr .

On identifiera $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On identifiera également une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé. Ainsi, on pourra noter :

$$\ker A = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\} \quad \text{et} \quad \text{Im } A = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$$

La transposée d'une matrice M sera notée $M^\top$. On rappelle que, pour toutes matrices A et B multipliables, $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Partie I — Résultats préliminaires

Les questions de cette partie sont indépendantes entre elles. Les résultats obtenus et les notations introduites seront utilisés dans la suite du problème.

- (a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $X^\top X = 0$ si et seulement si $X = 0$.
(b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\ker M = \ker(M^\top M)$.
- Démontrer que l'ensemble :

$$\Psi_r = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & A \end{pmatrix} \mid A \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R}) \text{ et } B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}) \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déterminer la dimension.

On pourra étudier une application linéaire de $\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ bien choisie.

- (a) Démontrer que l'ensemble :

$$\Psi'_r = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C^\top & 0 \end{pmatrix} \mid B, C \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}) \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déterminer la dimension.

- (b) Soient M_1 et M_2 deux éléments de Ψ'_r :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ C_1^\top & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ C_2^\top & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $(M_1 \mid M_2) = \text{tr}(B_1^\top B_2 + C_1^\top C_2)$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur Ψ'_r et vérifier que $(M_1 \mid M_2^\top) = (M_1^\top \mid M_2)$.

- Soient $A \in \text{GL}_r(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$. On définit la matrice M par sa représentation par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

- (a) Soient $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{R})$. On considère le vecteur colonne $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. Écrire les relations entre A, B, C, D, X et Y traduisant l'appartenance de Z à $\ker M$, sous la forme $X = SY$ et $TY = 0$, où S et T sont deux matrices à déterminer.

- (b) Montrer que les espaces $\ker M$ et $\ker(D - CA^{-1}B)$ ont même dimension.
(c) Montrer que $\operatorname{rg} M \geq r$.
(d) Montrer que $\operatorname{rg} M = r$ si et seulement si $D = CA^{-1}B$.
5. Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, on note :

$$\mathcal{H}_F = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid F \subset \ker A\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_G = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Im} A \subset G\}$$

- (a) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\ker A \cap \ker B \subset \ker(\lambda A + B)$ et $\operatorname{Im}(\lambda A + B) \subset \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B$.
(b) En déduire que $\mathcal{H}_F$ et $\mathcal{I}_G$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(c) Montrer que :

$$\dim \mathcal{H}_F = n(n - \dim F) \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{I}_G = n \dim G$$

Partie II — Détermination de la dimension maximale

Dans cette partie, V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que, pour toute matrice $M \in V$, $\operatorname{rg} M \leq r$.

1. On suppose de plus dans cette question que la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à V .
(a) Soient $A \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$ telles que $\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & A \end{pmatrix} \in V$. On note, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda I_r & B \\ B^\top & A \end{pmatrix}$$

En utilisant les questions I.1.b et I.4.c/d, montrer que $A = B^\top B = 0$, puis que $B = 0$.

- (b) Que peut-on dire de $V \cap \Psi_r$? En déduire que $\dim V \leq nr$.
2. (a) Montrer que $\dim V \leq nr$ dans le cas général (quand on ne suppose plus que $J_r \in V$).
On pourra utiliser sans démonstration que si A est de rang r' , il existe $P, Q \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PJ_{r'}Q$.
(b) On note V_L (resp. V_C) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les $n - r$ dernières lignes (resp. colonnes) sont nulles. Démontrer que V_L et V_C sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formés de matrices de rang inférieur ou égal à r , et de dimension nr .

Partie III — Détermination des espaces de dimension maximale

1. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, on admet qu'il existe une matrice $\operatorname{com}(A)$ telle que $A \operatorname{com}(A) = \operatorname{com}(A)A = (\det A)I_r$. On admet de plus que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, il existe r matrices $U_0, \dots, U_{r-1}$ telles que l'on ait, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{com}(xI_r - A) = \sum_{k=0}^{r-1} x^k U_k$$

- (a) Dédurre des propriétés admises ci-dessus que $U_{r-1} = I_r$ et montrer que, lorsque $P_A(x) = \det(xI_r - A) \neq 0$:

$$(xI_r - A)^{-1} = \frac{1}{P_A(x)} \sum_{k=0}^{r-1} x^k U_k$$

- (b) Soient $B, C \in \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda I_r - A & B \\ C^\top & D \end{pmatrix}$. À l'aide des questions précédentes et de la question I.4.c/d, démontrer que si $\text{rg } M_\lambda \leq r$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $D = 0$ et $C^\top B = 0$.

Dans toute la suite, V désigne un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que, pour toute matrice $M \in V$, $\text{rg } M \leq r$ et $\dim V = nr$.

2. On suppose de plus, dans cette question, que $J_r \in V$.

- (a) Montrer que tout élément M de V est de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C^\top & 0 \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $B, C \in \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{R})$ et $C^\top B = 0$. On notera par la suite W le sous-espace vectoriel de Ψ'_r formé des matrices $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C^\top & 0 \end{pmatrix}$ lorsque M décrit V .
- (b) On considère le produit scalaire sur Ψ'_r défini à la question I.3.b. Montrer que, pour tout $M \in W$, $(M \mid M^\top) = 0$ et en déduire que $\dim W \leq r(n-r)$.
- (c) Démontrer que l'application $\Phi : \begin{pmatrix} A & B \\ C^\top & 0 \end{pmatrix} \mapsto \left(A, \begin{pmatrix} 0 & B \\ C^\top & 0 \end{pmatrix} \right)$ est un isomorphisme de V dans $\mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \times W$.
- (d) Prouver que, si U et V sont deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ telle que la matrice d'ordre $r+1$: $\begin{pmatrix} A & V \\ U^\top & 0 \end{pmatrix}$ soit inversible.
- (e) Déduire de ce qui précède que si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C^\top & 0 \end{pmatrix}$ appartient à V , alors $B = 0$ ou $C = 0$.
- (f) Prouver enfin que, soit $B = 0$ pour tout élément de V , soit $C = 0$ pour tout élément de V . En déduire que $V = V_L$ ou $V = V_C$.
3. On traite maintenant le cas général (sans supposer $J_r \in V$).
- (a) Prouver que V possède au moins une matrice de rang r .
- (b) Prouver que V est soit de la forme $\mathcal{H}_F$ (avec $\dim F = n-r$), soit de la forme $\mathcal{I}_G$ (avec $\dim G = r$).