

Série PT - CORRIGÉ : vrai DS n°0001

Mathématiques — Septembre 2026. Corrigé par Maths-Ingé

Séries Numériques, Rayons de Convergence & Noyau de Dirichlet (4h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1 — Nature de séries numériques

1. Étude de $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{3^{2n}}{(-6)^n}$:

$$\text{On a } \frac{3^{2n}}{(-6)^n} = \frac{9^n}{(-6)^n} = \left(-\frac{3}{2}\right)^n.$$

Il s'agit d'une série géométrique de raison $q = -\frac{3}{2}$. Comme $|q| = \frac{3}{2} > 1$, la suite n'a pas pour limite 0.

La série diverge grossièrement.

2. Étude de $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n!}{(3n)!}$:

Posons $u_n = \frac{n!}{(3n)!} > 0$. Appliquons la règle de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(3n+3)!} \times \frac{(3n)!}{n!} = \frac{n+1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \frac{1}{3(3n+2)(3n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$, **la série converge.**

3. Étude de $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$:

Posons $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$. C'est une série alternée.

La suite $\left(\frac{1}{\ln n}\right)_{n \geq 2}$ est à termes positifs, strictement décroissante et tend vers 0 en $+\infty$.

D'après le Théorème Spécial des Séries Alternées (TSSA), **la série converge.**

4. Étude de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right]$:

Au voisinage de 0, on sait que $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. D'où :

$$\sinh(x) - \sin(x) = \frac{x^3}{3} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{3}$$

En posant $x = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on obtient :

$$\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3n^{3/2}}$$

Il s'agit d'une série à termes positifs équivalente à une série de Riemann convergente ($\alpha = 3/2 > 1$).

La série converge.

Exercice 2 — Rayons de convergence de séries entières

Justifions les associations entre hypothèses et conclusions :

• **H1 $\implies$ C5 ($R \geq 1$) :**

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par $M > 0$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $|a_n z^n| \leq M|z|^n$. La série $\sum |a_n z^n|$ converge par comparaison avec une série géométrique convergente. Donc $R \geq 1$.

• **H2 $\implies$ C1 ($R = 3$) :**

On a $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{3^n} > 0$. On a $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$. D'après la règle de d'Alembert, $R = 3$.

• **H3 $\implies$ C2 ($R = 1$) :**

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \cos(0) = 1 \neq 0$, la suite (a_n) ne tend pas vers 0. Pour $|z| < 1$, $|a_n z^n| \sim |z|^n$ (série absolument convergente). Pour $|z| > 1$, $a_n z^n \not\rightarrow 0$ (série divergente). Ainsi $R = 1$.

• **H4 $\implies$ C4 ($R = 1/3$) :**

La série s'écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} n 9^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} n (9z^2)^n$. Cette série entière converge si et seulement si $|9z^2| < 1$, c'est-à-dire $|z|^2 < 1/9 \iff |z| < 1/3$. D'où $R = 1/3$.

• **H5 $\implies$ C3 ($R = 1/9$) :**

Pour $a_n = n 9^n$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \times 9 \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 9$. D'après la règle de d'Alembert, $R = 1/9$.

Conclusion : H1–C5, H2–C1, H3–C2, H4–C4, H5–C3.

Exercice 3 — Étude d'une suite récurrente et lemme de Césàro

1. La fonction $f : x \mapsto x^2 + x$ est dérivable sur $[-1, 0]$ avec $f'(x) = 2x + 1$.

- $f'(x) < 0$ sur $[-1, -1/2[$, donc f y est strictement décroissante de $f(-1) = 0$ à $f(-1/2) = -1/4$.
- $f'(x) > 0$ sur $] -1/2, 0]$, donc f y est strictement croissante de $f(-1/2) = -1/4$ à $f(0) = 0$.

f admet un minimum absolu en $x = -1/2$ égal à $-1/4$. Aux bords, $f(-1) = 0$ et $f(0) = 0$.

2. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in] -1, 0[$:

- **Initialisation :** $u_0 \in] -1, 0[$ par hypothèse.
- **Hérédité :** Supposons $u_n \in] -1, 0[$. D'après l'étude de f , $\forall x \in] -1, 0[$, $f(x) \in] -1/4, 0[\subset] -1, 0[$. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n) \in] -1, 0[$.

On conclut que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in] -1, 0[$.

3. On a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 > 0$ car $u_n \neq 0$. La suite (u_n) est donc **strictement croissante**.

Étant croissante et majorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \in [-1, 0]$.

Par continuité de f , $\ell = f(\ell) \iff \ell = \ell^2 + \ell \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0$.

4. $u_{n+1} = u_n(u_n + 1)$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + 1) = 1$, d'où $u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

Calculons la différence des inverses :

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_n(1+u_n)} = \frac{(1+u_n) - 1}{u_n(1+u_n)} = \frac{u_n}{u_n(1+u_n)} = \frac{1}{1+u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$$

5. Posons $a_k = \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On sait que $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 1$.

D'après le lemme de Césàro, la moyenne des premiers termes converge vers 1 :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1 \iff \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_0} = 0$, il vient $-\frac{1}{nu_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$, c'est-à-dire $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$.

Exercice 4 — Noyau de Dirichlet et problème de Bâle

1. Convergence de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

(a) Pour $k \geq 2$, $k^2 > k(k-1) > 0 \implies \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

(b) En sommant cette inégalité pour k allant de 2 à n (somme télescopique) :

$$s_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

La suite (s_n) est strictement croissante (somme de termes positifs) et majorée par 2. **Elle converge donc vers une limite $S \leq 2$.**

(c) s_n est croissante. Étudions la monotonie de $t_n = s_n + \frac{1}{n}$:

$$t_{n+1} - t_n = s_{n+1} - s_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$$

t_n est donc strictement décroissante. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n - s_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Les suites (s_n) et (t_n) sont donc adjacentes.

(d) Puisque (s_n) et (t_n) sont adjacentes, pour tout $n \geq 1$, $s_n \leq S \leq t_n$, donc $|S - s_n| \leq t_n - s_n = \frac{1}{n}$.
Pour obtenir une précision à 10^{-5} près, il suffit de choisir $n = 10^5 = 100\,000$.

```
def s_approx():
    # N = 100 000 garantit que t_n - s_n = 1/N = 10^-5
    N = 100000
    s = sum(1 / (k**2) for k in range(1, N + 1))
    return s
```

2. Séries dérivées :

(a) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} s_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} S$.

En séparant termes pairs et impairs : $s_{2n+1} = a_n + b_n \implies b_n = s_{2n+1} - a_n$.

Par passage à la limite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = S - \frac{1}{4}S = \frac{3}{4}S$.

(b) La série $\left(\sum \frac{(-1)^k}{k^2} \right)$ est une série alternée dont le terme général en module $\frac{1}{k^2}$ tend en décroissant vers 0. D'après le TSSA, **elle converge**.

(c) En séparant les indices pairs et impairs dans la somme partielle c_{2n+1} :

$$c_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k}}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^2} = a_n - b_n$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{4}S - \frac{3}{4}S = -\frac{1}{2}S$.

3. Pour $x \not\equiv 0 [\pi]$, par somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{ix} \neq 1$:

$$D_n(x) = \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) = \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right)$$

Par la technique de l'arc moitié :

$$\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i \frac{(n+1)x}{2}} \left(-2i \sin \left(\frac{(n+1)x}{2} \right) \right)}{e^{i \frac{x}{2}} \left(-2i \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right)} = e^{i \frac{nx}{2}} \frac{\sin \left(\frac{(n+1)x}{2} \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}$$

En prenant la partie réelle :

$$D_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2 \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Comme $2 \cos(a) \sin(b) = \sin(a+b) - \sin(a-b)$, le numérateur vaut $\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

On obtient bien : $D_n(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

4. (a) Par intégration par parties avec $u(x) = x \implies u'(x) = 1$ et $v'(x) = \cos(kx) \implies v(x) = \frac{\sin(kx)}{k}$:

$$\int_0^\pi x \cos(kx) dx = \left[x \frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(kx)}{k} dx = 0 - \left[-\frac{\cos(kx)}{k^2} \right]_0^\pi = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$

(b) En intégrant la définition du noyau de Dirichlet terme à terme :

$$L_n = \int_0^\pi x \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) \right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\pi + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2}$$

5. Sur $]0, \pi]$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sin(x/2)$ sont $\mathcal{C}^1$ et la seconde ne s'annule pas, donc h est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$.
- **En 0** : Par équivalence classique, $\sin(x/2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x/2$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 2$. h se prolonge par continuité en posant $h(0) = 2$.

- **Dérivabilité et caractère $\mathcal{C}^1$ en 0** : Pour $x > 0$, $h'(x) = \frac{\sin(x/2) - \frac{x}{2} \cos(x/2)}{\sin^2(x/2)}$.

Grâce aux développements limités en 0 : $\sin(x/2) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)$ et $\frac{x}{2} \cos(x/2) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)$.

D'où le numérateur $\sim \frac{x^3}{24}$ et le dénominateur $\sin^2(x/2) \sim \frac{x^2}{4}$.

Ainsi $h'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3/24}{x^2/4} = \frac{x}{6} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

D'après le théorème de prolongement des fonctions $\mathcal{C}^1$, h est dérivable en 0 avec $h'(0) = 0$, et h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.