

Série PT - vrai DS n°0001

Mathématiques — 19 Septembre 2026, Quelquepart.

Séries Numériques, Rayons de Convergence & Noyau de Dirichlet (4h)

Profil : [Classique CPGE]

Technicité calculatoire : ***

Abstraction & Raisonnement : ***

Exercice 1 — Nature de séries numériques

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{3^{2n}}{(-6)^n} \right), \quad \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n!}{(3n)!} \right), \quad \left(\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n} \right) \quad \text{et} \quad \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\sinh \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right] \right)$$

Exercice 2 — Rayons de convergence de séries entières

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, on note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$.

Faire correspondre chaque hypothèse sur $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ci-dessous avec l'une des conclusions. Chaque conclusion doit être associée à une unique hypothèse. Les réponses doivent être justifiées.

Hypothèses	Conclusions
H1. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée	C1. $R = 3$
H2. $a_n = \sin \left(\frac{\pi}{3^n} \right)$	C2. $R = 1$
H3. $a_n = \cos \left(\frac{\pi}{3^n} \right)$	C3. $R = \frac{1}{9}$
H4. $\begin{cases} a_{2n} = n9^n \\ a_{2n+1} = 0 \end{cases}$	C4. $R = \frac{1}{3}$
H5. $a_n = n9^n$	C5. $R \geq 1$

Exercice 3 — Étude d'une suite récurrente et lemme de Cesàro

On étudie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$u_0 \in]-1, 0[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 + u_n$$

- Déterminer les variations de la fonction $f : x \mapsto x^2 + x$ sur $[-1, 0]$ en précisant les valeurs aux bords de l'intervalle et les éventuels extrema.
- En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-1, 0[$.
- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Montrer que $u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$. En déduire la limite de $\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$.

On donne le résultat suivant qu'on pourra utiliser sans démonstration :

Lemme de Cesàro : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Si elle converge vers une limite ℓ , alors la suite

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \quad \text{converge également vers } \ell.$$

- Déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 — Noyau de Dirichlet et problème de Bâle

L'objectif de l'exercice est de montrer le résultat suivant :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1. **Convergence de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:**

- (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
- (b) En déduire que la suite (s_n) est majorée, puis qu'elle converge. On note S la limite de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $t_n = s_n + \frac{1}{n}$. Montrer que les suites $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
- (d) *Écrire un script Python qui permet de calculer une valeur approchée de S à 10^{-5} près. Le script devra être expliqué.*

2. **Nous allons montrer que les trois séries suivantes convergent et exprimer leur somme en fonction de S :**

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(2k)^2} \right), \quad \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2k+1)^2} \right) \quad \text{et} \quad \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^k}{k^2} \right)$$

- (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2}$ et $b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2}$.

En reliant les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, déterminer la convergence et la somme (en fonction de S) des séries $\left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(2k)^2} \right)$ et $\left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2k+1)^2} \right)$.

- (b) Montrer que la série $\left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^k}{k^2} \right)$ converge.

- (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $c_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2}$.

Exprimer c_{2n+1} à l'aide de a_n et b_n , puis déterminer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le **noyau de Dirichlet** par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx)$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$:

$$D_n(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

- 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $L_n = \int_0^\pi x D_n(x) dx$.

- (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^\pi x \cos(kx) dx$.

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2}$$

5. Montrer que la fonction $h : x \mapsto \frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$, qu'elle se prolonge par continuité en 0 et que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$. On pourra continuer de noter h cette fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.